UNIVERSIDAD SIMÓN BOLÍVAR
Departamento de Computación y T. I.
Estructuras Discretas III (CI-2527)
Prof.: S, Carrasquel

Sep-Dic 2021

Práctica 02

Números Enteros - Estructuras Algebráicas

1. Demuestre que $1 < b \wedge a|b \Rightarrow (a \not| (b+1))$
2. Dos enteros son de la misma paridad si ambos son pares o ambos son impares. Dados dos enteros cualesquiera, demuestre que su suma o diferencia tienen la misma paridad.
3. Si $(a, 4) = 2$ y $(b, 4) = 2$ entonces $(a + b, 4) = 4$.
4. Si $m > 0$ entonces $(ma, mb) = m(a, b)$
5. ¿Existen enteros x, y tales que $x + y = 100$ y $(x, y) = 3$?
6. Use el algoritmo de Euclides para calcular el mcd de las siguientes parejas de números y expréselo como combinación lineal de dichos números
   (a) 24,30
   (b) 24,125
   (c) 32,18
7. Demuestre las siguientes propiedades:

   Asociatividad $((b, c), d) = (b, (c, d))$

   Absorvente $(1, b) = 1$

   3 $(b, c) = (|b|, |c|)$

   4 $(b, c) = (b, (b + c)) = (b, (b - c))$

   5 $b = a \cdot c + d \Rightarrow (b, c) = (c, b)$

   Distributividad $d \cdot (b, c) = (d \cdot b, d \cdot c)$
8. Demuestre que si b es un número compuesto entonces tiene un divisor primo d tal que $d \leq \sqrt{b}$
9. ¿Es 101 un número primo?
10. Demuestre que existen infinitos números primos

11. Diga cuáles de las operaciones binarias definidas a continuación son conmutativas y cuáles son asociativas
    (a) $< \mathbb{Z}^+, * >$, donde $*$ está definida por $a * b = a^b$
    (b) $< \mathbb{Z}^+, * >$, donde $*$ está definida por $a * b = ab + 1$
    (c) $< \mathbb{Q}, * >$, donde $*$ está definida por $a * b = a - b$
    (d) $< \mathbb{Z}^+, * >$, donde $*$ está definida por $a * b = 2^{a+b}$

12. En el conjunto $\mathbb{Z}$ definimos las siguientes operaciones
$$a \oplus b = a + b - 8, \quad a \otimes b = a + b - ab$$
    donde $+$ es la suma usual en $\mathbb{Z}$. Determine si la operación $\oplus$
    (a) Es asociativa en $\mathbb{Z}$
    (b) Posee elemento identidad
    (c) Posee elemento absorbente
    (d) Cada elemento elemento de $\mathbb{Z}$ tiene inverso con respecto del operador $\oplus$
    (e) Responda las mismas preguntas para el operador $\otimes$ en $\mathbb{Z}$

13. En cada una de las siguientes tablas
    (a) Muestre si son o no semigrupos
    (b) Muestre el elemento identidad si lo tiene y explique si son o no monoides
    (c) ¿cuáles elementos tienen inversos?

$*_1$	a	b	c	d
a	a	a	a	a
b	b	b	b	b
c	c	c	c	c
d	d	d	d	d

$*_2$	a	b	c	d
a	a	b	c	d
b	c	a	d	b
c	b	d	a	c
d	d	b	c	a

$*_3$	a	b	c	d
a	a	b	c	d
b	b	a	d	d
c	c	d	a	d
d	d	d	d	d

14. Demuestre que $\langle M_n, \oplus \rangle$ es un grupo, donde $M_n = \{0, 1, 2, \ldots, n-1\}$ y $\oplus$ es definida por $a \oplus b = a + b + (-n)$ ($+$ es la suma usual en $\mathbb{Z}$).

15. Sea $\langle G, \circ, e \rangle$ un grupo, $b \in G$.Demuestre que $b = (b^{-1})^{-1}$.

16. Sea $\langle G, \circ, e \rangle$ un grupo, $b, c, d \in G$.Demuestre que $b \circ d = c \circ d \equiv b = c$.